

ΜΑΥ111: Απειροστικός Λογισμός Ι (2025-26) - Σεπτέμβριος 2026

Ημερομηνία: 1/9/2026

Διάρκεια: 3 ώρες

1. α) Έστω A, B μη-κενά και άνω φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι $\sup A \leq \sup B$ αν και μόνο αν για κάθε $a \in A$ και για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $b \in B$ τέτοιο ώστε $a - \varepsilon < b$.

β) Βρείτε, αν υπάρχουν, τα $\sup, \inf, \max$ και $\min$ των παρακάτω συνόλων.

$$A = \{x \in \mathbb{Q} : 0 < x^2 - 1 \leq 4, x \geq 0\}, \quad B = \left\{ \frac{2}{n} + (-1)^n : n \in \mathbb{N} \right\}. \quad (1 + 1 \text{ μον.})$$

2. α) Έστω (a_n) μια ακολουθία μη-μηδενικών πραγματικών αριθμών και $\ell \in (0, 1)$. Δείξτε ότι αν $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \rightarrow \ell$ τότε $a_n \rightarrow 0$.

β) Υπολογίστε, αν υπάρχουν, τα όρια των παρακάτω ακολουθιών.

$$\alpha_n = \frac{\cos(n^5)}{\sqrt[3]{n}} + \frac{2^n(n+2)!}{n^n}, \quad \beta_n = (3\sqrt[n]{n} - 9/5)^n, \quad \gamma_n = \frac{1}{\sqrt{n!}} + \frac{1}{\sqrt{(n+1)!}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{(2n)!}}$$

Αναφέρετε ρητά τα κριτήρια σύγκλισης, γνωστά όρια ή άλλα αποτελέσματα από τη θεωρία που χρησιμοποιήσατε. (1 + 1 μον.)

3. α) Έστω (a_n) μια ακολουθία πραγματικών αριθμών και $x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι το x είναι οριακό σημείο της (a_n) αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ και για κάθε $m \in \mathbb{N}$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$, $n \geq m$, τέτοιο ώστε $|a_n - x| < \varepsilon$.

β) Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και $x_0 \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία (x_n) με $x_n \rightarrow x_0$ ισχύει ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = +\infty$. (1 + 1 μον.)

4. α) Έστω $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $f(0) = f(1)$. Δείξτε ότι υπάρχει $x_0 \in [0, 1/2]$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = f(x_0 + 1/2)$.

β) Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{αν } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{αν } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$. Εξετάστε την f ως προς τη συνέχεια και την παραγωγισιμότητα σε κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$. (1 + 1 μον.)

5. α) Έστω $a < b$ και $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι η f είναι αύξουσα στο (a, b) αν και μόνο αν $f'(x) \geq 0$ για κάθε $x \in (a, b)$. Αν υποθέσουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο (a, b) , μπορούμε να συμπεράνουμε ότι $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (a, b)$;

β) Συγκρίνετε τους αριθμούς e^π και π^e . Ποιος είναι μεγαλύτερος; (1 + 1 μον.)

6. Έστω $f, g : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμες συναρτήσεις που ικανοποιούν την $f'(x)g(x) - f(x)g'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (0, 1)$. Αν για κάποια $x_1, x_2 \in (0, 1)$, $x_1 < x_2$, ισχύει ότι $f(x_1) = f(x_2) = 0$, δείξτε ότι η g έχει μια ρίζα στο (x_1, x_2) . (1 μον.)

Δικαιολογήστε λεπτομερώς τις απαντήσεις σας.

Καλή επιτυχία!